Über Summen, deren Reihen die Bernoulli-Zahlen involvieren*

Leonhard Euler

§1 Wie bemerkenswert die nach ihrem Entdecker benannten Bernoulli-Zahlen sind, welche einst Jakob Bernoulli in seiner „Ars Coniectandi" benutzt hat, um die Progressionen der Potenzen der natürlichen Zahlen zu summieren, ist, nachdem von anderen, die Theorie der Reihen mit neuen Entdeckungen bereichert worden, dann auch von mir gezeigt worden, wo ich durch dieselben Zahlen die Summen der Reihen der Reziproken ausgedrückt gegeben habe. Bernoulli hat freilich die Progression dieser Zahlen wegen der Lästigkeit der Rechnung nicht weiter als fünf Terme fortgesetzt, welche $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{5}{66}$ sind, und die dem Urheber um einschließlich die elften Potenzen zu summieren genügt haben. Nachdem ich aber ein hinreichend gefälliges Bildungsgesetz dieser Progression entdeckt hatte, habe ich von dieser die 17 ersten Terme angegeben. Ich habe aber die Bernoulli-Zahlen jeweils mit den Zahlen 6, 10, 14, 18, 22, etc multipliziert, damit die Nenner einfacher werden, und dann habe ich, der ich die Terme dieser neuen Reihe mit den Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$,

*Originaltitel: „De summis serierum numeros Bernoullianos involventium", erstmals publiziert in „*Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 14, 1770, pp. 129-167", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 15, pp. 91 - 130", Eneström-Nummer E393, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Artur Diener, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

$\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, etc bezeichnet hat, die folgenden Werte gefunden:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= 1 & \mathfrak{I} &= \frac{43867}{21} \\
\mathfrak{B} &= \frac{1}{3} & \mathfrak{K} &= \frac{1222277}{55} \\
\mathfrak{C} &= \frac{1}{3} & \mathfrak{L} &= \frac{854513}{3} \\
\mathfrak{D} &= \frac{3}{5} & \mathfrak{M} &= \frac{1181820455}{273} \\
\mathfrak{E} &= \frac{5}{3} & \mathfrak{N} &= \frac{76977927}{1} \\
\mathfrak{F} &= \frac{691}{105} & \mathfrak{O} &= \frac{23749461029}{15} \\
\mathfrak{G} &= \frac{35}{1} & \mathfrak{P} &= \frac{8615841276005}{231} \\
\mathfrak{H} &= \frac{3617}{15} & \mathfrak{Q} &= \frac{84802531453387}{85} \\
& & \mathfrak{R} &= \frac{90219075042845}{3}
\end{aligned}$$

§2 Aber die Betrachtung der Reihen der reziproken Potenzen, deren Summen, sooft der Exponent eine gerade Zahl ist, ich gezeigt habe durch dieselben Potenzen der Zahl π, die die Peripherie des Kreises, dessen Durchmesser gleich 1 ist, bestimmt werden zu können, hat die Verbindung dieser Zahlen um vieles klarer gemacht. Wenn wir nämlich die Summen auf die folgende Weise bezeichnen:

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc} &= A\pi^2 \\
1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc} &= B\pi^4 \\
1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc} &= C\pi^6 \\
1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc} &= D\pi^8 \\
1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \text{etc} &= E\pi^{10} \\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

habe ich zuerst gezeigt, dass diese Zahlen A, B, C, D, etc die vorhergehenden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc so bestimmt werden, dass

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{A} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{1}A & \text{und daher} & A = \dfrac{2^0\mathfrak{A}}{1\cdot 2\cdot 3} \\
\mathfrak{B} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2^2}B & & B = \dfrac{2^2\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \\
\mathfrak{C} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7}{2^4}C & & C = \dfrac{2^4\mathfrak{C}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7} \\
\mathfrak{D} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 9}{2^6}D & & D = \dfrac{2^6\mathfrak{D}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 9} \\
\mathfrak{E} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 11}{2^8}E & & E = \dfrac{2^8\mathfrak{E}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 11} \\
\mathfrak{F} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 13}{2^{10}}F & & F = \dfrac{2^{10}\mathfrak{F}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 13} \\
\text{etc} & & \text{etc}
\end{array}$$

ist.

§3 Weiter habe ich aber für die Progression der Buchstaben A, B, C, D, etc zwei Bildungsgesetze bemerkt, mit deren Hilfe sich ein beliebiger mithilfe der Vorhergehenden bestimmen lässt. Das erste Bildungsgesetz bestimmt einen beliebigen Term durch die einzelnen der vorhergehenden so, dass

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} \\
B &= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{2}{1\cdot 2\cdots 5} \\
C &= \frac{B}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{A}{1\cdot 2\cdots 5} + \frac{3}{1\cdot 3\cdots 7} \\
D &= \frac{C}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{B}{1\cdot 2\cdots 5} + \frac{A}{1\cdot 2\cdots 7} - \frac{4}{1\cdot 2\cdots 9} \\
E &= \frac{D}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{C}{1\cdot 2\cdots 5} + \frac{B}{1\cdot 2\cdots 7} - \frac{A}{1\cdot 2\cdots 9} + \frac{5}{1\cdot 2\cdots 11}
\end{aligned}$$

ist. Das andere Bildungsgesetz aber drückt gefälliger einen gewissen Term durch die Produkte aus zwei Vorhergehenden auf folgende Weise aus:

$$\begin{aligned}
5B &= 2A^2, \quad \text{während } A = \tfrac{1}{6} \text{ ist}\\
7C &= 4AB\\
9D &= 4AC + 2BB\\
11E &= 4AD + 4BC\\
13F &= 4AE + 4BD + 2CC\\
15G &= 4AF + 4BE + 4CD\\
17H &= 4AG + 4BF + 4CE + 2DD\\
&\text{etc,}
\end{aligned}$$

woher es mir auch möglich war, diese Reihen so weit fortzusetzen.

§4 Nachdem diese Dinge erörtert worden sind, habe ich beschlossen an dieser Stelle die Summen vieler Reihen, deren Terme die Zahlen A, B, C, D, E, etc außer den anderen Faktoren, deren Bildungsgesetz an sich klar ist, involvieren, sodass mir im Allgemeinen die Untersuchung der Summe dieser Reihe

$$S + \alpha Ax^2 + \beta Bx^4 + \gamma Cx^6 + \delta Dx^8 + \varepsilon Ex^{10} + \text{etc}$$

vorgelegt ist, während die Buchstaben α, β, γ, δ, etc ein bestimmte bekannte Reihe festsetzen; ich habe schon an vielen Beispielen gezeigt, dass daher außerordentliche Reihen entstehen, deren Summen der ganzen Aufmerksamkeit würdig sind. Ich beginne also mit der Reihe

$$S = Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + Dx^8 + Ex^{10} + \text{etc},$$

welche klar ist durch das erste Bildungsgesetz der Progression der Buchstaben A, B, C, D, etc natürlich aus der Entwicklung dieses Bruches zu resultieren

$$S = \frac{\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^2 - \frac{2}{1\cdot 2\cdots 5}x^4 + \frac{3}{1\cdot 2\cdots 7}x^6 - \frac{4}{1\cdot 2\cdots 9}x^8 + \text{etc}}{1 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdots 5}x^4 - \frac{1}{1\cdot 2\cdots 7}x^6 + \frac{1}{1\cdot 2\cdots 9}x^8 - \text{etc}},$$

deren Nenner den Wert

$$\frac{\sin x}{x}$$

ausdrückt; und sein Differential liefert

$$\frac{dx \cos x}{x} - \frac{dx \sin x}{xx},$$

welches mit $-\frac{x}{2\mathrm{d}x}$ multipliziert den Zähler selbst lieferte, sodass

$$S = \frac{\sin x - x\cos x}{2\sin x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\cot x$$

ist und daher ist die Summe dieser Reihe

$$Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + Dx^8 + Ex^{10} + \text{etc} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\cot x,$$

wo es verdient bemerkt zu werden, wenn x verschwindet, dass die Summe dann gleich $\frac{1}{6}xx$ wegen

$$\cot x = \frac{1 - \frac{1}{3}xx}{x}$$

sein wird.

§5 Wir wollen also $xx = -yy$ setzen und die ganze Reihe negativ auslegen, dass diese Summe

$$S = Ayy - By^4 + Cy^6 - Dy^8 + Ey^{10} - \text{etc}$$

gesucht wird, und weil schon durch das erste Bildungsgesetz

$$s = \frac{\frac{1}{1\cdot2\cdot3}y^2 + \frac{2}{1\cdot2\cdots5}y^4 + \frac{3}{1\cdot2\cdots7}y^6 + \frac{4}{1\cdot2\cdots9}y^8 + \text{etc}}{1 + \frac{1}{1\cdot2\cdot3}y^2 + \frac{1}{1\cdot2\cdots5}y^4 + \frac{1}{1\cdot2\cdots7}y^6 + \frac{1}{1\cdot2\cdots9}y^8 + \text{etc}}$$

ist, deren Nenner

$$\frac{1}{2y}(e^y - e^{-y})$$

ist und deren Differential

$$-\frac{\mathrm{d}y}{2yy}(e^y - e^{-y}) + \frac{\mathrm{d}y}{2y}(e^y + e^{-y}),$$

welches mit $\frac{y}{2\mathrm{d}y}$ multipliziert den Zähler

$$-\frac{1}{4y}(e^y - e^{-y}) + \frac{1}{4}(e^y + e^{-y})$$

gibt, ist die Summe dieser Reihe

$$s = \frac{y}{2}\cdot\frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} - \frac{1}{2}.$$

Es verdient hier dieser Fall bemerkt zu werden, in dem $y = 1$ ist, und es wird diese Reihe summiert:

$$A - B + C - D + E - \text{etc} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ee+1}{ee-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{ee-1}$$

Wenn hier wieder für die Buchstaben A, B, C, D, etc die angenommenen Reihen selbst eingesetzt werden und, insoweit es gemacht werden kann, zu einer Summe zusammengezogen werden, wird

$$\frac{1}{\pi\pi+1} + \frac{1}{4\pi\pi+1} + \frac{1}{9\pi\pi+1} + \frac{1}{16\pi\pi+1} + \text{etc} = \frac{1}{ee-1}$$

sein.

§6 Nachdem die Summe der Reihe

$$Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + Dx^8 + \cdots + \text{etc} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x \cot x$$

gefunden worden ist, in welcher sich zugleich die andere

$$Ay^2 - By^4 + Cy^6 - Dy^8 + \text{etc} = \frac{y}{2} \cdot \frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1} - \frac{1}{2}$$

umfassen lässt, können so mit Hilfe der Differentiation wie der Integration unzählige andere daher gefolgert werden, deren Summe in gleicher Weise angegeben werden kann. Nachdem jene Reihe nämlich mit x^n multipliziert wurde, wird die Differentation

$$\begin{aligned} &(n+2)Ax^{n+1} + (n+4)Bx^{n+3} + (n+6)Cx^{n+5} + (n+8)Dx^{n+7} + \text{etc} \\ =&\frac{n}{2}x^{n-1} - \frac{n+1}{2}x^n \cot x + \frac{x^{n+1}}{2\sin^2 x} \end{aligned}$$

geben oder

$$\begin{aligned} &(n+2)Ax^2 + (n+4)Bx^4 + (n+6)Cx^6 + (n+8)Dx^8 + \text{etc} \\ =&\frac{n}{2} - \frac{1}{2}(n+1)x \cot x + \frac{xx}{2\sin^2 x}; \end{aligned}$$

wenn aber jene Reihe mit $x^{n-1}\mathrm{d}x$ multipliziert integriert wird, wird die folgende Summation hervorgehen:

$$\begin{aligned} &\frac{A}{n+2}x^{n+2} + \frac{B}{n+4}x^{n+4} + \frac{C}{n+6}x^{n+6} + \frac{D}{n+8}x^{n+8} + \text{etc} \\ =&\frac{1}{2n}x^n - \frac{1}{2}\int x^n \mathrm{d}x \cot x, \end{aligned}$$

welche Summe als bekannt zu betrachten ist, auch wenn das Integral der Formel $\int x^n dx \cot x$ weder entwickelt noch endlich ausgedrückt werden kann. Ja man wird sogar, indem man zwei Operationen kombiniert und wiederholt, unendliche Reihen der Form

$$\alpha Ax^2 + \beta Bx^4 + \gamma Cx^6 + \delta Dx^8 + \text{etc}$$

erhalten, wo die Buchstaben α,β, γ, δ, etc Produkte aus zwei oder mehreren Brüchen sind, deren Zähler wie Nenner arithmetische Progressionen beschreiben. Wenn zum Beispiel eine durch Differentiation gefundene Reihe mit $\frac{dx}{x}$ multipliziert und integriert wird, wird

$$\frac{n+2}{2}Ax^2 + \frac{n+4}{4}Bx^4 + \frac{n+6}{6}Cx^6 + \text{etc} = \frac{n}{2}\ln\frac{x}{\sin x} - \frac{x}{2}\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{2}$$

entstehen, sodass

$$\frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{4}Bx^4 + \frac{1}{6}Cx^6 + \frac{1}{8}Dx^8 + \text{etc} = \frac{1}{2}\ln\frac{x}{\sin x}$$

ist.

§7 Es ist aber außerdem eine andere völlig einzigartige Methode gegeben, aus der gefundenen Reihe unzählige andere zu finden, deren Summe ebenso angegeben werden können soll. Für dieses Ziel stelle ich die anfängliche Reihe so dar

$$Aa^2x^2 + Ba^4x^4 + Ca^6x^6 + Da^8x^8 + \text{etc} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ax\cot ax,$$

und ich multipliziere diese mit einer Differentialformel $x dx$ solcher Art, dass, wenn nach der Integration x ein bestimmter Wert $x = f$ zugeteilt wird, das Integral $\int Xx^n dx$ einen angenehmen Wert erhält, dass natürlich

$$\int Xx^2 dx = \alpha\int X dx, \quad \int Xx^4 dx = \beta\int Xx^2 dx,$$
$$\int Xx^6 dx = \gamma\int Xx^4 dx, \quad \text{etc}$$

wird, nach Ansetzung wovon eine Reihe solcher Art entstehen wird

$$\alpha Aa^2 + \alpha\beta Ba^4 + \alpha\beta\gamma Ca^6 + \alpha\beta\gamma\delta Da^8 + \text{etc} = \frac{1}{2} - \frac{a\int Xx dx \cot ax}{2\int X dx},$$

wo X so angenommen werden kann, dass α, β, γ, δ, etc entweder in einer arithmetischen Progression voranschreitende oder gebrochene Zahlen werden, deren Zähler wie Nenner eine solche Progression beschreiben. Wenn zum Beispiel

$$X = x^{m-1}(1-x^2)^k$$

genommen wird, wird für $x = 1$

$$\begin{aligned}
&\int x^{m+1}\mathrm{d}x(1-x^2)^k = \frac{m}{m+2k+2}\int x^{m-1}\mathrm{d}x(1-x^2)^k \quad \text{und daher } \alpha = \frac{m}{m+2k+2}\\
&\int x^{m+3}\mathrm{d}x(1-x^2)^k = \frac{m}{m+2k+4}\int x^{m+1}\mathrm{d}x(1-x^2)^k \qquad \beta = \frac{m+2}{m+2k+4}\\
&\int x^{m+5}\mathrm{d}x(1-x^2)^k = \frac{m}{m+2k+6}\int x^{m+3}\mathrm{d}x(1-x^2)^k \qquad \gamma = \frac{m+4}{m+2k+6}\\
&\int x^{m+7}\mathrm{d}x(1-x^2)^k = \frac{m}{m+2k+8}\int x^{m+5}\mathrm{d}x(1-x^2)^k \qquad \delta = \frac{m+6}{m+2k+8}\\
&\qquad\qquad\text{etc}
\end{aligned}$$

Aber wenn

$$X\mathrm{d}x = e^{-mxx}x^n\mathrm{d}x$$

genommen wird, wird, nachdem nach der Integration $x = \infty$ gesetzt wurde,

$$\begin{aligned}
&\int e^{-mxx}x^{n+2}\mathrm{d}x = \frac{n+1}{2m}\int e^{-mxx}x^n\mathrm{d}x \qquad \text{und daher} \quad \alpha = \frac{n+1}{2m}\\
&\int e^{-mxx}x^{n+4}\mathrm{d}x = \frac{n+3}{2m}\int e^{-mxx}x^{n+2}\mathrm{d}x \qquad \beta = \frac{n+3}{2m}\\
&\int e^{-mxx}x^{n+6}\mathrm{d}x = \frac{n+5}{2m}\int e^{-mxx}x^{n+4}\mathrm{d}x \qquad \gamma = \frac{n+5}{2m}\\
&\qquad\qquad\text{etc}
\end{aligned}$$

sein. Nachdem aber

$$X\mathrm{d}x = x^{n-1}\mathrm{d}x \ln^m x$$

genommen wurde und nach der Integration $x = 1$ gesetzt wurde, wird

$$\int x^{n-1}\mathrm{d}x \ln^m x = \pm\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}{n^{m+1}},$$

während das „+" Zeichen gilt, wenn m eine gerade Zahl ist, andernfalls das „−" Zeichen.

§8 Ich bleibe hier aber nicht bei diesen Transformationen, die anderenortes gründlicher ausgelegt worden sind, sondern werde eine andere Quelle betrachten, woher Reihen solcher Art entstehen, welche mir schon einst die allgemeine Summation von Progressionen eröffnet hat, wenn natürlich der allgemeine Term der Reihe oder der, der mit dem Index x übereinstimmt, gleich X gesetzt wird, dass X eine gewisse Funktion von x ist, und der summatorische Term dieser Reihe gleich S gesetzt wird, habe ich gefunden, dass durch die Bernoulli-Zahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc

$$2S = 2\int X\mathrm{d}x + X + \frac{\mathfrak{A}\mathrm{d}X}{1\cdot 2\cdot 3\mathrm{d}x} - \frac{B\mathrm{d}^3X}{1\cdot 2\cdots 5\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathfrak{C}\mathrm{d}^5X}{1\cdot 2\cdots 7\mathrm{d}x^5} - \frac{\mathfrak{D}\mathrm{d}^7X}{1\cdot 2\cdots 9\mathrm{d}x^7} + \text{etc}$$

sein wird, woher, wenn die anderen Zahlen A, B, C, D, etc, die auf die Summen der reziproken Potenzen bezogen worden, eingeführt werden, wir folgern:

$$2S = 2\int X\mathrm{d}X + X + \frac{A\mathrm{d}x}{1\mathrm{d}x} - \frac{B\mathrm{d}^3X}{2^2\mathrm{d}x^3} + \frac{C\mathrm{d}^5X}{2^4\mathrm{d}x^5} - \frac{D\mathrm{d}^7X}{2^6\mathrm{d}x^7} + \text{etc.}$$

Wenn wir daher die Reihe, deren allgemeiner Term X und der summatorische gleich S ist, nach Belieben annehmen, werden wir diese Summation

$$\frac{A\mathrm{d}X}{2\mathrm{d}x} - \frac{B\mathrm{d}^3X}{2^3\mathrm{d}x^3} + \frac{C\mathrm{d}^5X}{2^5\mathrm{d}x^5} - \frac{D\mathrm{d}^7X}{2^7\mathrm{d}x^7} + \text{etc} = S - \int X\mathrm{d}x - \frac{1}{2}X$$

haben. Welche Funktion von x auch immer also für X angenommen wird, können wir, nachdem die Summation der Progression, deren allgemeiner Term X ist, ausgeführt worden ist, die Summer diese Reihe, die die Buchstaben A, B, C, D, etc involviert, angeben, auch wenn vielleicht die Summation derselben, die nach den gerade erörterten Vorschriften ausgeführt wurde, mit sehr großer Schwierigkeit verbunden ist.

§9 Zuerst also wollen wir X einen Wert solcher Art zuteilen, dass

$$X = \frac{1}{x^n}$$

ist, woher

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = -\frac{n}{x^{n+1}}, \quad \frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3} = -\frac{n(n+1)(n+2)}{x^{n+3}}, \quad \frac{\mathrm{d}^5X}{\mathrm{d}x^5} = -\frac{n(n+1)\cdots(n+4)}{x^{n+5}}, \quad \text{etc}$$

wird, und weil

$$\int X\mathrm{d}x = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + O$$

ist und

$$S = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots + \frac{1}{x^n},$$

werden wir diese Reihe

$$\begin{aligned}&-\frac{nA}{2x^{n+1}} + \frac{n(n+1)(n+2)B}{2^3x^{n+3}} - \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)C}{2^5x^{n+5}} + \text{etc}\\&=S - \frac{1}{2x^n} + \frac{1}{(n-1)x^{n-1}} - O\end{aligned}$$

haben, wo die Konstante O aus einem bestimmten bekannten Fall bestimmt werden muss, in welchem x ein gewisser Wert zugeteilt wird. So wird für $x = \infty$ gesetzt, weil ja dann die ganze Reihe verschwindet, diese Konstante O die Summe dieser ins Unendliche fortgesetzten Reihe ausdrücken

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc},$$

welche wir wissen durch die Quadratur des Kreises π ausgedrückt werden zu können, sooft der Exponent n eine gerade Zahl ist. Diese Fälle möchte ich also zuerst entwickeln.

Fall 1, in welchem $n = 2$ ist

§10 In diesem Fall $n = 2$ also wird die Konstante

$$O = \frac{\pi\pi}{6} = A\pi^2$$

und, nachdem die Summe dieser Progression unbestimmt

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{x^2} = S$$

gesetzt wurde, werden wir diese Summation

$$\begin{aligned}&-\frac{2A}{2x^3} + \frac{2\cdot3\cdot4B}{2^3x^5} - \frac{2\cdot3\cdots6C}{2^5x^7} + \frac{2\cdot3\cdots8D}{2^7x^9} - \text{etc}\\&=S - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} - A\pi^2\end{aligned}$$

haben oder

$$\frac{1\cdot 2A}{2^1x}-\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4B}{2^3x^3}+\frac{1\cdot 2\cdots 6C}{2^5x^5}-\frac{1\cdot 2\cdots 8D}{2^7x^7}+\text{etc}$$
$$=A\pi^2x^2-x+\frac{1}{2}-Sxx.$$

Deren Summe also kann, sooft n eine ganze Zahl ist, beschafft werden. So werden wir

$$\frac{1\cdot 2A}{2}-\frac{1\cdot 2\cdots 4B}{2^3}+\frac{1\cdot 2\cdots 6C}{2^5}-\frac{1\cdot 2\cdots 8D}{2^7}+\text{etc}=A\pi^2-\frac{3}{2}$$
$$\frac{1\cdot 2A}{4}-\frac{1\cdot 2\cdots 4B}{4^3}+\frac{1\cdot 2\cdots 6C}{4^5}-\frac{1\cdot 2\cdots 8D}{4^7}+\text{etc}=4A\pi^2-\frac{3}{2}-4\left(1+\frac{1}{4}\right),$$
$$\frac{1\cdot 2A}{6}-\frac{1\cdot 2\cdots 4B}{6^3}+\frac{1\cdot 2\cdots 6C}{6^5}-\frac{1\cdot 2\cdots 8D}{6^7}+\text{etc}=9A\pi^2-\frac{5}{2}-9\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right),$$
$$\frac{1\cdot 2A}{8}-\frac{1\cdot 2\cdots 4B}{8^3}+\frac{1\cdot 2\cdots 6C}{8^5}-\frac{1\cdot 2\cdots 8D}{8^7}+\text{etc}=16A\pi^2-\frac{7}{2}-16\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right)$$

haben.

§11 Wir wollen dieselben Reihen mit der oben erörterten Methode untersuchen, und nachdem ich dort

$$Aay-Ba^3y^3+Ca^5y^5-Da^7y^7+\text{etc}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2ay}+1}{2^{2ay}-1}-\frac{1}{2ay}$$

hatte, wollen wir mit $e^{-y}y\mathrm{d}y$ multiplizieren und nach so aufgestellter Integration, dass die Integrale für $y=0$ gesetzt verschwinden, wollen wir $y=\infty$ setzen und erhalten so

$$\int e^{-y}y^2\mathrm{d}y=-e^{-y}y^2-2e^{-y}y-2\cdot 1e^{-y}+1\cdot 2=1\cdot 2$$

$$\int e^{-y}y^4\mathrm{d}y=-e^{-y}(y^4+4y^3+4\cdot 3y^2+4\cdot 3\cdot 2\cdot y+4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$$
$$=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$$

und auf ähnliche Weise

$$\int e^{-y}y^6\mathrm{d}y=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6,\quad \int e^{-y}y^8\mathrm{d}y=1\cdot 2\cdots 8,\quad \text{etc}$$

Deshalb werden wir zu dieser Summation gelangen

$$1 \cdot 2 \cdot Aa - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot Ba^3 + 1 \cdot 2 \cdots 6 \cdot Ca^5 - \text{etc} = \frac{1}{2} \int e^{-y} y \mathrm{d}y \frac{e^{2ay}+1}{e^{2ay}-1} - \frac{1}{2a}.$$

Wir wollen nun $a = \frac{1}{2}$ setzen, sodass diese Reihe hervorgeht

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot A}{2} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4B}{2^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdots 6C}{2^5} - \frac{1 \cdot 2 \cdots 8D}{2^7} + \text{etc},$$

deren Summe wir wissen gleich $A\pi^2 - \frac{3}{2}$ zu sein; nun aber haben wir dieselbe so ausgedrückt gefunden

$$\frac{1}{2} \int e^{-y} y \mathrm{d}y \frac{e^y+1}{e^y-1} - 1 = \frac{1}{2} \int y \mathrm{d}y \frac{1+e^{-y}}{e^y-1} - 1,$$

wenn nur nach der Integration $y = \infty$ gesetzt wird. Deren Gültigkeit kann nur auf diese Weise gezeigt werden: Es sei $e^{-y} = z$ und nach so ausgeführter Integration, dass das Integral für $z = 1$ gesetzt verschwindet, muss $z = 0$ gesetzt werden, welche Substitution

$$\frac{1}{2} \int y \mathrm{d}y \frac{1+e^{-y}}{e^y-1} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}z \ln z \frac{1+z}{1-z} = \int \mathrm{d}z \ln z \left(\frac{1}{2} + z + z^2 + z^3 + z^4 + \text{etc} \right)$$

liefert. Aber wegen

$$\int z^{n-1} \mathrm{d}z \ln z = \frac{z^n}{n} \ln z - \frac{z^n}{nn} + \frac{1}{nn}$$

wird für $z = 0$ gesetzt

$$\int z^{n-1} \mathrm{d}z \ln z = \frac{1}{nn}$$

und daher durch die Reihe

$$\frac{1}{2} \int y \mathrm{d}y \frac{1+e^{-y}}{e^y-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc} = A\pi\pi - \frac{1}{2},$$

wie es sein soll.

§12 Leichter wird dasselbe gezeigt, indem man

$$1 - z = v \quad \text{oder} \quad z = 1 - v$$

setzt, dass die Integrale von der Grenze $v = 0$ bis hin zur Grenze $v = 1$ erstreckt werden müssen; dann aber wird unsere Reihe so ausgedrückt werden

$$-\frac{1}{2}\int \frac{(2-v)\mathrm{d}v}{v} \ln(1-v) - 1,$$

welche $A\pi\pi - \frac{3}{2}$ gleich sein muss, sodass

$$A\pi\pi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2\mathrm{d}v}{v}\ln(1-v) + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}v \ln(1-v)$$

ist; aber es ist

$$\int \mathrm{d}v \ln(1-v) = -(1-v)\ln(1-v) + (1-v) - 1 = 1$$

und so ist es notwendig, dass

$$A\pi\pi = -\int \frac{\mathrm{d}v}{v}\ln(1-v)$$

ist, was per se klar ist. Weil nämlich

$$-\ln(1-v) = v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{4}v^4 + \text{etc}$$

ist, wird, nachdem die Integration nach vorgeschriebenen Gesetz aufgestellt wurde,

$$-\int \frac{\mathrm{d}v}{v}\ln(1-v) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc} = A\pi^2$$

sein.

§13 Wir wollen auch auf ähnliche Weise den Fall $a = \frac{1}{4}$ entwickeln und es wird gezeigt werden müssen, dass

$$\frac{1}{2}\int e^{-y}y\mathrm{d}y\frac{e^{\frac{y}{2}}+1}{e^{\frac{y}{2}}-1} - 2 = 4A\pi^2 - \frac{3}{2} - 4\left(1+\frac{1}{4}\right)$$

oder

$$\int e^{-y}y\mathrm{d}y\frac{e^{\frac{y}{2}}+1}{e^{\frac{y}{2}}-1} = 8A\pi^2 + 1 - 8\left(1+\frac{1}{4}\right) = 8A\pi^2 - 9$$

sein wird. Wir wollen

$$e^{-\frac{y}{2}} = 1 - v$$

setzen, dass gleich das Integral von der Grenze $v = 0$ bis hin zur Grenze $v = 1$ erstreckt werden muss, und wir werden wegen

$$e^{-y} = (1-v)^2, \quad y = -2\ln(1-v)$$

und

$$\mathrm{d}y = \frac{2\mathrm{d}v}{1-v}$$

diese zu zeigende Gleichheit haben

$$-4\int \frac{2-3v+vv}{v}\mathrm{d}v\ln(1-v) = 8A\pi^2 - 9;$$

aber, wie wir schon beobachtet haben, ist

$$\int \mathrm{d}v\ln(1-v) = -1$$

und

$$\int v\mathrm{d}v\ln(1-v) = -\frac{3}{4},$$

woher man

$$-8\int \frac{\mathrm{d}v}{v}\ln(1-v) - 12 + 3 = 8A\pi^2 - 9$$

errechnet oder

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{v}\ln(1-v) = A\pi^2.$$

§14 Auf ähnliche Weise muss, wenn $a = \frac{1}{6}$ genommen wird, gezeigt werden, dass

$$\frac{1}{2}\int e^{-y}y\mathrm{d}y\frac{e^{\frac{y}{3}}+1}{e^{\frac{y}{3}}-1} - 3 = 9A\pi^2 - \frac{5}{2} - 9\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)$$

oder

$$\int e^{-y}y\mathrm{d}y\frac{e^{\frac{y}{3}}+1}{e^{\frac{y}{3}}-1} = 18A\pi^2 + 1 - 18\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)$$

ist. Wir wollen zuerst

$$e^{-\frac{y}{3}} = z$$

setzen, dass

$$y = -3\ln z \quad \text{und} \quad \mathrm{d}y = -\frac{3\mathrm{d}z}{z}$$

ist und wir werden

$$9\int zz\mathrm{d}z\ln z\frac{1+z}{1-z} = 9\int \mathrm{d}z(-zz-2z-2+\frac{2}{1-z})\ln z$$

haben; aber er ist

$$\int zz\mathrm{d}z\ln z = +\frac{1}{9}, \quad \int z\mathrm{d}z\ln z = +\frac{1}{4}, \quad \int \mathrm{d}z\ln z = 1,$$

woher unsere Integralformel

$$18\int \frac{\mathrm{d}z}{1-z}\ln z = -18\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)+1$$

wird, sodass

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{1-z}\ln z = A\pi^2$$

ist, wie wir schon oben gezeigt haben, und auf diese Weise findet man auch die Gültigkeit der folgenden Fälle.

§15 Wenn wir aber $a=1$ nehmen, dass diese Reihe

$$1\cdot 2\cdot A - 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot B + 1\cdots 6\cdot C - 1\cdots 8\cdot D + \text{etc}$$

zu summieren ist, lässt sich, weil ja $x=\frac{1}{2}$ wird, aus §10 die Summe nicht angeben, weil ja der Wert der Progression

$$S = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{xx},$$

wann immer die Anzahl der Terme gleich $\frac{1}{2}$ ist, nicht bekannt ist. Eine andere Methode aber liefert ihre Summe

$$\frac{1}{2}\int e^{-y}y\mathrm{d}y\frac{1+e^{-2y}}{1-e^{-2y}} - \frac{1}{2},$$

die für $e^{-y}=z$ gesetzt in diese Form

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}z\ln z\frac{1+zz}{1-zz} - \frac{1}{2} = \int \frac{\mathrm{d}z\ln z}{1-zz} - \frac{1}{2}\int \mathrm{d}z\ln z - \frac{1}{2}$$

verwandelt wird, und weil ja $\int \mathrm{d}z\ln z = 1$ ist, wird sie

$$\int \frac{\mathrm{d}z\ln z}{1-zz} - 1 = 1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\text{etc}-1 = \frac{3}{4}A\pi\pi - 1$$

werden. Wenn wir also gleich festsetzen, dass für $x = \frac{1}{2}$ genommen $S = \Delta$ wird, findet man dieselbe Summe gleich

$$\frac{1}{4}A\pi\pi - \frac{1}{4}\Delta,$$

woher wir folgern, dass

$$\frac{3}{4}A\pi\pi - 1 = \frac{1}{4}A\pi\pi - \frac{1}{4}\Delta$$

sein wird, und daher jene unbekannte Größe

$$\Delta = 4 - 2A\pi\pi,$$

woraus sich diese Progression interpolieren lässt

$$\begin{array}{ll}
1 & 4 - 2A\pi\pi \\
1 + \frac{1}{4} & 4 - 2A\pi\pi + \frac{4}{9} \\
1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} & 4 - 2A\pi\pi + \frac{4}{9} + \frac{4}{25} \\
1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} & 4 - 2A\pi\pi + \frac{4}{9} + \frac{4}{25} + \frac{4}{49} \\
1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} & 4 - 2A\pi\pi + \frac{4}{9} + \frac{4}{25} + \frac{4}{49} + \frac{4}{81} \\
\text{etc,} & \text{etc,}
\end{array}$$

und weil ja die infinitesimalen Terme gleich sind, wird

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc} = 4\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc}\right) - 2A\pi\pi,$$

welche Gleichheit per se klar ist, weil

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc} = A\pi\pi \quad \text{und} \quad 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \text{etc} = \frac{3}{4}A\pi\pi$$

ist. Wir wollen die Sache im Allgemeinen betrachten und es sei $a = \frac{m}{n}$, dass diese unendliche Reihe zu summieren ist

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot Am}{n} - \frac{1 \cdot 2 \cdots 4 \cdot Bm^3}{n^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdots 6 \cdot Cm^5}{n^5} - \frac{1 \cdot 2 \cdots 8 \cdot Dm^7}{n^7} + \text{etc},$$

und für

$$e^{-\frac{y}{n}} = z$$

gesetzt findet man ihre Summe

$$\frac{1}{2}\int e^{-y} y\mathrm{d}y \cdot \frac{1+e^{-\frac{2my}{n}}}{1-e^{-\frac{2my}{n}}} - \frac{n}{2m} = \frac{nn}{2}\int z^{n-1}\mathrm{d}z \ln z \frac{1+z^{2m}}{1-z^{2m}} - \frac{n}{2m},$$

welche zurückgeführt wird auf diese Form

$$nn\int \frac{z^{n-1}\mathrm{d}z \ln z}{1-z^{2m}} - \frac{nn}{2}\int z^{n-1}\mathrm{d}z \ln z - \frac{n}{2m}.$$

Weil aber

$$\int z^{n-1}\mathrm{d}z \ln z = \frac{1}{nn}$$

ist, erhalten wir durch Entwicklung des ersten Gliedes dieser jener gleiche Reihe

$$-\frac{1}{2} - \frac{n}{2m} + \frac{nn}{nn} + \frac{nn}{(2m+n)^2} + \frac{nn}{(4m+n)^2} + \frac{nn}{(6m+n)^2} + \text{etc.}$$

Aber aus §10 geht wegen $2x = \frac{n}{m}$ oder $x = \frac{2}{2m}$ für

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{x^2}$$

gesetzt dieselbe Summe

$$\frac{nn}{4mm}A\pi^2 - \frac{n}{2m} + \frac{1}{2} - \frac{nn}{4mm}S$$

hervor, nach Anstellen eines Vergleiches welcher mit der Vorhergehenden man

$$S = A\pi\pi - \frac{4mm}{(2m+n)^2} - \frac{4mm}{(4m+n)^2} - \frac{4mm}{(6m+n)^2} - \frac{4mm}{(8m+n)^2} - \text{etc}$$

berechnet, woraus wir den Wert von S angeben können, welche gebrochene Zahl auch immer für x angenommen wird; wenn z. B. $x = \frac{\nu}{\mu}$ gesetzt wird, wird

$$S = A\pi^2 - \frac{\mu\mu}{(\mu+\nu)^2} - \frac{\mu\mu}{(2\mu+\nu)^2} - \frac{\mu\mu}{(3\mu+\nu)^2} - \frac{\mu\mu}{(4\mu+\nu)^2} - \text{etc}$$

sein, welche Reihe auf diese Weise sofort durch x gefälliger ausgedrückt wird, dass

$$S = A\pi^2 - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{(x+4)^2} - \text{etc}$$

ist.

§17 Was wir hier durch so große Umwege gefunden haben, scheint so offensichtlich, dass es sofort aus der ersten Reihe hätte berechnet werden können. Weil nämlich

$$A\pi^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \text{etc}$$

ist, ist daher natürlich klar, dass

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{x^2} = A\pi^2 - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+3)^2} - \text{etc}$$

sein wird. Weil aber jene Reihe $A\pi^2$ nicht mit der Wahrheit verträglich ist, wenn der Buchstaben x nicht ganze Zahlen bezeichnet, in welchem die Schlussfolgerung klar ist, ist die Gewissheit dieser für die Fälle, in denen x eine gebrochene oder sogar irrationale Zahl ist, noch höchst zweifelhaft; und obwohl nun klar ist, dass sie als richtig anzusehen ist, sieht man das gewiss keinesfalls aus dieser kurzen Begründung, und wenn nicht die vorhergehendem Überlegungen die Aufgabe erledigt hätten, hätten wir mit Recht einen sehr guten Grund zum Zweifeln gehabt. Nun aber lässt sich mit vollem Vertrauen diese Methode um vieles weiter erstrecken, sodass, wenn

$$S = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc} \quad \text{bis ins Unendliche}$$

war, dass wir daher sicher in Erwägung ziehen können, dass im Allgemeinen

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots + \frac{1}{x^n} = S - \frac{1}{(x+1)^n} - \frac{1}{(x+2)^n} - \frac{1}{(x+3)^n} - \text{etc}$$

sein wird, auch wenn x keine ganze Zahl war, sondern eine gebrochene oder sogar eine beliebige irrationale.

FALL 2, IN WELCHEM $n = 4$ IST

§18 Nachdem zuerst unbestimmt

$$S = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots + \frac{1}{x^4}$$

gesetzt wurde, dann aber diese Reihe ins Unendliche fortgesetzt wurde

$$O = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc} \quad \text{ins Unendliche,}$$

dass $O = B\pi^4$ ist, werden wir diese Summation haben

$$-\frac{4A}{2x^5}+\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot B}{2^3\cdot x^7}-\frac{4\cdot 5\cdots 8\cdot C}{2^5\cdot x^9}+\frac{4\cdot 5\cdots 10\cdot D}{2^7\cdot x^{11}}-\text{etc}=S-\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3x^3}-B\pi^4$$

welche mit $-1\cdot 2\cdot 3\cdot x^4$ multipliziert übergeht in diese

$$\begin{aligned}&\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot A}{2x}-\frac{1\cdot 2\cdots 6\cdot B}{2^3\cdot x^3}+\frac{1\cdot 2\cdots 8\cdot C}{2^5\cdot x^5}-\frac{1\cdot 2\cdots 10\cdot D}{2^7\cdot x^7}+\text{etc}\\ =&1\cdot 2\cdot 3\cdot B\pi^4x^4+3-2x-6Sx^4,\end{aligned}$$

und so kann, sooft x eine ganze Zahl ist, die Summe dieser Reihe beschafft werden. Für die Zahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc wird

$$\frac{4\mathfrak{A}}{2x}-\frac{6\mathfrak{B}}{2x^3}+\frac{8\mathfrak{C}}{2x^5}-\frac{10\mathfrak{D}}{2x^7}+\text{etc}=6B\pi^4x^4+3-2x-6Sx^4$$

sein.

§19 Wir können aber die Summe derselben aus der oben gefundenen Form bestimmen, welche

$$Aay-Ba^3y^3+Ca^5y^5-Da^7y^7+\text{etc}=\frac{1}{2}\frac{e^{2ay}+1}{e^{2ay}-1}-\frac{1}{2ay}$$

war; diese liefert nämlich mit $e^{-y}y^3\mathrm{d}y$ multipliziert und nachdem die Integration von der Grenze $y=0$ bis hin zu $y=\infty$ erstreckt wurde

$$\begin{aligned}&1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot Aa-1\cdot 2\cdots 6\cdot Ba^3+1\cdot 2\cdots 8\cdot Ca^5-1\cdot 2\cdots 10\cdot Da^7+\text{etc}\\ =&\frac{1}{2}\int e^{-y}y^3\mathrm{d}y\frac{1+e^{-2ay}}{1-e^{-2ay}}-\frac{1}{a}.\end{aligned}$$

Aber diese Integratformel lässt sich ohne Integration auf diese Weise entwickeln: weil

$$\frac{1+e^{-2ay}}{1-e^{-2ay}}=1+2e^{-2ay}+2e^{-4ay}+2e^{-6ay}+2e^{-8ay}+\text{etc}$$

ist, multipliziere man mit $\frac{1}{2}e^{-y}y^3\mathrm{d}y$, und weil ja im Allgemeinen

$$\int e^{-my}y^3\mathrm{d}y=-e^{-my}\left(\frac{y^3}{m}+\frac{3y^2}{m^2}+\frac{3\cdot 2y}{m^3}+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{m^4}\right)+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{m^4}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{m^4}$$

ist, wird jene Summe in diese unendliche Reihe verwandelt

$$-\frac{1}{a}+3+\frac{6}{(2a+1)^4}+\frac{6}{(4a+1)^4}+\frac{6}{(6a+1)^4}+\frac{6}{(8a+1)^4}+\text{etc.}$$

Daher wird für $a=\frac{1}{2x}$ gesetzt, dass die erste Reihe hervorgeht, auch

$$\begin{aligned}&-2x+3+\frac{6x^4}{(x+1)^4}+\frac{6x^4}{(x+2)^2}+\frac{6x^4}{(x+3)^4}+\frac{6x^4}{(x+4)^3}+\text{etc}\\ =&6B\pi^4x^4+3-2x-6Sx^4\end{aligned}$$

sein und daher, in dem man durch $6x^4$ teilt,

$$B\pi^4-S=\frac{1}{(x+1)^4}+\frac{1}{(x+2)^4}+\frac{1}{(x+3)^4}+\frac{1}{(x+4)^4}+\text{etc,}$$

völlig wie wir schon oben erkannt haben.

Fall 3, in dem n eine beliebige Zahl ist

§20 Hier bemerke ich zuerst, wenn diese unendliche Reihe

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\text{etc}=O$$

gesetzt wird, dass die Reihe aus der Entwicklung dieser Integralformel entsteht

$$\int\frac{dz\ln^{n-1}z}{1-z},$$

wenn die Integration von der Grenze $z=0$ bis zur Grenze $z=1$ erstreckt wird. Weil nämlich, nachdem dieses Gesetz bemerkt worden ist,

$$\begin{aligned}&\int z^{m-1}dz\ln z=\frac{1}{m}z^m\ln z-\frac{1}{m^2}z^m=-\frac{1}{m^2}\\ &\int z^{m-1}dz\ln^2 z=\frac{1}{m}z^m\ln^2 z-\frac{2}{m^2}z^m\ln z+\frac{2\cdot 1}{m^3}z^m=+\frac{1\cdot 2}{m^3}\\ &\int z^{m-1}dz\ln^3 z=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{m^4}\\ &\int z^{m-1}dz\ln^4 z=+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{m^5}\\ &\qquad\text{etc}\end{aligned}$$

ist, wird im Allgemeinen

$$\pm\int z^{m-1}\mathrm{d}z\ln^{n-1}z=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{m^n}$$

sein, wo das obere Zeichen „+" gilt, wenn n eine ungerade Zahl ist, das untere „-" aber, wenn n eine gerade Zahl ist. Deshalb liefert die Entwicklung der Formel

$$\pm\int\frac{\mathrm{d}z}{1-z}(\ln z)^{n-1}$$

diese Reihe unter dem selben Gesetz der Doppeldeutigkeit

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{etc}\right),$$

sodass

$$O=\frac{\pm 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}\int\frac{\mathrm{d}z}{(1-z)}(\ln z)^{n-1}$$

ist.

§21 Auf ähnliche Weise kann diese Reihe bis zu einem gewissen Term unbestimmt summiert werden, wenn nämlich

$$S=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\cdots+\frac{1}{m^n}$$

gesetzt wird, wird

$$S=\frac{\pm 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}\int\frac{1-z^m}{1-z}\mathrm{d}z(\ln z)^{n-1}$$

sein, welche Formel mit der Wahrheit verträglich ist, ob m eine ganze Zahl ist oder eine gebrochene; daher ist, weil

$$\frac{\pm 1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\int\frac{z^m\mathrm{d}z}{1-z}(\ln z)^{n-1}=\frac{1}{(m+1)^n}+\frac{1}{(m+2)^n}+\frac{1}{(m+3)^n}+\text{etc}$$

ist, klar, dass

$$S=O-\frac{1}{(m+1)^n}-\frac{1}{(m+2)^n}-\frac{1}{(m+3)^n}-\frac{1}{(m+4)^n}-\text{etc.}$$

Deshalb, weil für $m = \frac{1}{2}$ genommen

$$\frac{1}{m^n} + \frac{1}{(m+1)^n} + \frac{1}{(m+2)^n} + \text{etc} = \frac{2^n}{1} + \frac{2^n}{3^n} + \frac{2^n}{5^n} + \frac{2^n}{7^n} + \text{etc} = (2^n - 1)O$$

ist, finden wir daher

$$S = O - (2^n - 1)O + 2^n = 2^n - (2^n - 2)O,$$

woher die interpolierten Werte von S sich so verhalten werden:

wenn gilt:	wird sein
$m = 0$	0
$m = \frac{1}{2}$	$2^n - (2^n - 2)O$
$m = 1$	1
$m = 1\frac{1}{2}$	$2^n + \frac{2^n}{3^n} - (2^n - 2)O$
$m = 2$	$1 + \frac{1}{2^n}$
$m = 2\frac{1}{2}$	$2^n + \frac{2^n}{3^n} + \frac{2^5}{5^n} - (2^n - 2)O$
$m = 3$	$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$
$m = 3\frac{1}{2}$	$2^n + \frac{2^n}{3^n} + \frac{2^n}{5^n} + \frac{2^n}{7^n} - (2^n - 2)O$
etc	etc

Wenn zu den einzelnen Termen $(2^n - 2)O$ hinzuaddiert werden und diese dann durch 2^n geteilt werden, wird man die Interpolation dieser Reihe haben

$$1, \quad 1 + \frac{1}{3^n}, \quad 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}, \quad 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n}, \quad \text{etc}$$

§22 Weil die Summe der unendlichen Reihe O durch die Quadratur des Kreises oder durch den Buchstaben π gekennzeichnet ist, sooft n eine gerade Zahl war, verdienen die Reduktionen der folgenden Integralformeln auf die

Quadratur des Kreises bemerkt zu werden:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}z}{1-z}\ln z &= -1A\pi^2 &&= -\frac{2^0}{2\cdot 3}\mathfrak{A}\pi^2\\
\int \frac{\mathrm{d}z}{1-z}(\ln z)^3 &= -1\cdot 2\cdot 3\cdot B\pi^4 &&= -\frac{2^2}{4\cdot 5}\mathfrak{B}\pi^4\\
\int \frac{\mathrm{d}z}{1-z}(\ln z)^5 &= -1\cdot 2\cdots 5\cdot C\pi^6 &&= -\frac{2^4}{6\cdot 7}\mathfrak{C}\pi^6\\
\int \frac{\mathrm{d}z}{1-z}(\ln z)^7 &= -1\cdot 2\cdots 7\cdot D\pi^8 &&= -\frac{2^6}{8\cdot 9}\mathfrak{D}\pi^8\\
\int \frac{\mathrm{d}z}{1-z}(\ln z)^9 &= -1\cdot 2\cdots 9\cdot E\pi^{10} &&= -\frac{2^8}{10\cdot 11}\mathfrak{E}\pi^{10}\\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

Und daher ist das umso mehr zu bewundern, weil sich keine dieser Formeln

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{1-z}(\ln z)^2,\quad \int \frac{\mathrm{d}z}{1-z}(\ln z)^4,\quad \int \frac{\mathrm{d}z}{1-z}(\ln z)^6,\quad \text{etc}$$

auf keine Weise auf irgendeine bekannte Quadratur zurückführen lässt, obwohl dennoch aus dieser Ordnung die erste Formel $\int \frac{\mathrm{d}z}{1-z}(\ln z)^0$ natürlich durch Logarithmen absolviert wird.

§23 Wir wollen nun in §9 m anstelle von x schreiben und die dort gegebene Gleichung mit $-1\cdot 2\cdots(n-1)m^n$ multiplizieren, dass wir diese Summation erhalten

$$\begin{aligned}
&\frac{1\cdot 2\cdots nA}{2m} - \frac{1\cdot 2\cdots(n+2)B}{2^3m^3} + \frac{1\cdot 2\cdots(n+4)C}{2^5\cdot m^5} - \frac{1\cdot 2\cdots(n+6)D}{2^7\cdot m^7} + \text{etc}\\
=&1\cdot 2\cdots(n-1)(Om^n - Sm^n + \frac{1}{2} - \frac{m}{n-1});
\end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise aber, die wir oben (§19) benutzt haben, werden wir, indem $a = \frac{1}{2m}$ gesetzt wird, die Summe derselben Reihe durch die folgende Integralformel ausgedrückt finden:

$$\frac{1}{2}\int e^{-y}y^{n-1}\mathrm{d}y\frac{1+e^{-y:m}}{1-e^{-y:m}} - 1\cdot 2\cdots(n-2)m,$$

sodass

$$\frac{1}{2}\int e^{-y}y^{n-1}\mathrm{d}y\frac{1+e^{-y:m}}{1-e^{-y:m}} = 1\cdot 2\cdots(n-1)\left(Om^n - Sm^n + \frac{1}{2}\right)$$

ist, und wegen

$$\frac{1+e^{-y:m}}{1-e^{-y:m}} = -1 + \frac{2}{1-e^{-y:m}}$$

wird

$$\int \frac{e^{-y}y^{n-1}\mathrm{d}y}{1-e^{-y:m}} = 1\cdot 2\cdots(n-1)m^n(O-S)$$

sein, welche Integralformel, indem man

$$e^{-y:m} = z$$

setzt, auf die, die wir gerade behandelt haben, zurückgeführt wird, natürlich

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{1-z}(\ln z)^{n-1},$$

wenn freilich ihr Integral von der Grenze $z=1$ bis hin zur Grenze $z=0$ erstreckt wird.

Fall 4, in welchem $n = 1$ ist

§24 Dieser Fall erfordert eine spezielle Betrachtung, weil die Summe der Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc}$$

unendlich ist; es sei daher unbestimmt

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x},$$

und weil $\int X\mathrm{d}x = \ln x$ wegen $X = \frac{1}{x}$ ist, werden wir diese Summation

$$-\frac{1\cdot A}{2x^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot B}{2^3\cdot x^4} - \frac{1\cdot 2\cdots 5\cdot C}{2^5\cdot x^6} + \frac{1\cdot\cdots\cdot 7\cdot D}{2^7\cdot x^8} - \text{etc} = S - \ln x - \frac{1}{2x} - O$$

haben oder, indem man mit $-x$ multipliziert

$$\frac{1A}{2x} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot B}{2^3\cdot x^3} + \frac{1\cdot 2\cdots 5\cdot C}{2^5\cdot x^5} - \frac{1\cdot 2\cdots 7\cdot D}{2^7\cdot x^7} + \text{etc} = (O-S)x + \frac{1}{2} + x\ln x,$$

wo die Konstante O aus einem per se bekannten Fall bestimmt werden muss. Wenn z. B. $x=1$ genommen wird, wird wegen $S=1$ und $\ln x = 0$

$$O - \frac{1}{2} = \frac{1\cdot A}{2} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot B}{2^3} + \frac{1\cdot 2\cdots 5\cdot C}{2^5} - \frac{1\cdot 2\cdots 7\cdot D}{2^7} + \text{etc}$$

sein. Damit aber dieser Wert O leichter erhalten wird, setze man $x = 10$, und weil

$$\begin{aligned}&\left(O - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{10}\right) \cdot 10 + \frac{1}{2} + 10 \ln 10\\ =&\frac{1 \cdot A}{20} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot B}{20^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdots 5 \cdot C}{20^5} - \frac{1 \cdot 2 \cdots 7 \cdot D}{20^7} + \text{etc}\end{aligned}$$

wird, findet man daher den Wert von O durch eine sehr stark konvergierende Reihe

$$O = 0,5772156649015329,$$

welche Zahl umso größerer Aufmerksamkeit würdig erscheint, weil ich sie, nachdem ich einst in die Untersuchung viel Eifer investiert habe, auf keine Weise auf eine bekannte Art an Größen zurückführen konnte. Nach ihrem Fund allerdings wird die Summe der bis zu welchem Term auch immer fortgesetzten Reihe leicht angegeben, weil

$$\begin{aligned}&1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x}\\ =&O + \ln x + \frac{1}{2x} - \frac{1 \cdot A}{2x^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot B}{2^3 \cdot x^4} - \frac{1 \cdot 2 \cdots 5 \cdot C}{2^5 \cdot x^6} + \frac{1 \cdot 2 \cdots 7 \cdot D}{2^7 \cdot x^8} - \text{etc}\end{aligned}$$

ist.

§25 Weil aber, nachdem der Buchstabe m anstelle von x geschrieben wurde, die Summe der Reihe

$$\frac{1 \cdot A}{2m} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot B}{2^3 \cdot m^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdots 5 \cdot C}{2^5 \cdot m^5} - \frac{1 \cdot 2 \cdots 7 \cdot D}{2^7 \cdot m^7} + \text{etc},$$

welche gerade als gleich

$$(O - S)m + \frac{1}{2} + m \ln m$$

hervorging, während

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}$$

wird, auch aus dieser Reihe

$$Aay - Ba^3y^3 + Ca^5y^5 - Da^7y^7 + \text{etc} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + e^{-2ay}}{1 - e^{-2ay}} - \frac{1}{2ay} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2ay} + \frac{1}{1 - e^{-2ay}}$$

bestimmt werden kann, wollen wir diese Operation benutzen. Wir wollen natürlich mit $e^{-y}\mathrm{d}y$ multiplizieren und das Integral von der Grenze $y = 0$ bis hin zu $y = \infty$ erstrecken, und weil im Allgemeinen

$$\int e^{-y} y^{\mu} \mathrm{d}y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \mu$$

ist, werden wir

$$\begin{aligned} &1Aa - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot Ba^3 + 1 \cdot 2 \cdots 5Ca^5 - 1 \cdot 2 \cdots 7 \cdot Da^7 + \text{etc} \\ = &-\frac{1}{2} - \frac{1}{2a} \int \frac{e^{-y}\mathrm{d}y}{y} + \int \frac{e^{-y}\mathrm{d}y}{1 - e^{-2ay}} \end{aligned}$$

erhalten. Daher wird für $a = \frac{1}{2m}$ gesetzt

$$(O - S)m + \frac{1}{2} + m \ln m = -\frac{1}{2} - m \int \frac{e^{-y}}{y} \mathrm{d}y + \int \frac{e^{-y}}{1 - e^{-y:m}} \mathrm{d}y$$

sein und daher wird für $m = 1$ gesetzt

$$O = -\int \frac{e^{-y}}{y} \mathrm{d}y + \int \frac{e^{-y}}{1 - e^{-y}} \mathrm{d}y$$

werden, sodass die Zahl O, die wir suchen, eine doppelte transzendente Größe involviert.

§26 Wir wollen daher diese Formeln mithilfe der Substitution $e^{-y} = z$ transformieren und es wird, indem man die Integrale von der Grenze $z = 1$ bis hin zu $z = 0$ erstreckt,

$$O = -\int \frac{\mathrm{d}z}{\ln z} - \int \frac{\mathrm{d}z}{1 - z} = -\int \frac{\mathrm{d}z(1 - z + \ln z)}{(1 - z)\ln z}$$

werden. Oder wir wollen $1 - z = v$ setzen, dass die Integrale von der Grenze $v = 0$ bis hin zu $v = 1$ erstreckt werden müssen, und es wird

$$O = \int \frac{\mathrm{d}v}{\ln(1 - v)} + \int \frac{\mathrm{d}v}{v} = \int \frac{v + \ln(1 - v)}{v \ln(1 - v)} \mathrm{d}v$$

hervorgehen. Aber die größte Schwierigkeit besteht hier darin, dass jeder Teil von beiden getrennt entwickelt eine unendlich große Zahl liefert, welche zwei Unendlichkeiten sich aber notwendigerweise gegenseitig so aufheben müssen, dass man für O jenen endlichen oben angegebenen Wert erhält. Nachdem aber die erste Form beibehalten wurde, wollen wir die Integrale auf gewohnte Weise von der Grenze $z = 0$ bis hin zu $z = 1$ erstrecken, sodass

$$O = \int \frac{\mathrm{d}z}{\ln z} + \int \frac{\mathrm{d}z}{1-z}$$

ist, und weil, während i eine unendliche Zahl bezeichnet,

$$\ln z = i(z^{1:i} - 1)$$

ist, wird

$$O = \int \frac{\mathrm{d}z}{1-z} - \frac{1}{i}\int \frac{\mathrm{d}z}{1-z^{1:i}}$$

sein. Wir wollen gleich $z = u^i$ setzen, sodass

$$O = i\int \frac{u^{i-1}\mathrm{d}u}{1-u^i} - \int \frac{u^{i-1}\mathrm{d}u}{1-u}$$

wird, die Entwicklung welcher Formel

$$\begin{array}{llllllll} O = & u^i & + & \frac{1}{2}u^{2i} & + & \frac{1}{3}u^{3i} & & +\text{etc} \\ -\frac{1}{i}u^i - \frac{1}{i+1}u^{i+1}\cdots & & -\frac{1}{2i}u^{2i} - \frac{1}{2i+1}u^{2i+1}\cdots & & -\frac{1}{3i}u^{3i} - \frac{1}{3i+1}u^{3i+1} & & & -\text{etc} \end{array}$$

liefert und, indem man, wie es sein muss, $u = 1$ setzt, wird

$$\begin{aligned} O = +1 &- \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \cdots + \frac{1}{2i-1}\right) \\ &+ \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2i} + \frac{1}{2i+1} + \frac{1}{2i+2} + \cdots + \frac{1}{3i-1}\right) \\ &+ \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3i} + \frac{1}{3i+1} + \frac{1}{3i+2} + \cdots + \frac{1}{4i-1}\right) \\ &\text{etc} \end{aligned}$$

wo zu bemerken ist, dass die erste dieser harmonischen Progressionen

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \cdots + \frac{1}{2i-1}$$

wegen der unendlichen Zahl i $\ln 2$ ausdrückt, die zweite $\ln \frac{3}{2}$, die dritte $\ln \frac{4}{3}$ etc, sodass man durch eine hinreichend einfache und regelmäßige Reihe

$$O = 1 - \ln 2 + \frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \ln\frac{4}{3} + \frac{1}{4} - \ln\frac{5}{4} + \frac{1}{5} - \ln\frac{6}{5} + \text{etc}$$

hat.

§27 Dieselbe Reihe hätte sich sofort aus der ersten Form berechnen lassen; wenn nämlich dort (§24) $x = \infty$ gesetzt wird, wird $O = S - \ln x - O$, sodass

$$O = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x} - \ln x$$

ist; weil aber die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x}$ genauso wie $\ln x$ einen unendlichen Wert hat, sollte, damit leichter die letzte von der ersten abgezogen werden kann, $\ln x$ in so viele Teile geteilt werden, wie die erste Reihe Terme hat, was natürlich auf diese Weise passiert

$$\ln x = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{x}{x-1},$$

woher die gefundene Reihe gebildet wird. Diese Reihe kann nun auf viele Arten in andere Formen gebracht werden, aus welchen sich der Wert der Zahl O zumindest leicht näherungsweise berechnen lassen wird. Zuerst nämlich, weil

$$\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{5n^5} + \text{etc}$$

ist, werden wir

$$\begin{aligned} O = {} & \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc}\right) - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc}\right) \\ & + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc}\right) - \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \text{etc}\right) \\ & + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc}\right) - \frac{1}{7}\left(1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \text{etc}\right) \\ & \text{etc} \end{aligned}$$

haben. Darauf, wegen

$$\frac{1}{n-1} - \ln\frac{n}{n-1} = \frac{1}{2n^2} + \frac{2}{3n^3} + \frac{3}{4n^4} + \frac{4}{5n^5} + \frac{5}{6n^6} + \text{etc},$$

wird auch

$$\begin{aligned} O = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc}\right) \\ & + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \text{etc}\right) \\ & + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc}\right) + \frac{6}{7}\left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \text{etc}\right) \\ & \text{etc} \end{aligned}$$

sein.

§28 Man betrachte zuerst die ersten Teile dieser letzten Form, die aus geraden Potenzen bestehen; diese werden sich nach der oben angewandten Art ausgedrückt so verhalten:

$$\frac{1}{2}(A\pi^2-1)+\frac{3}{4}(B\pi^4-1)+\frac{5}{6}(C\pi^6-1)+\text{etc.}$$

Man betrachte also diese Reihe

$$P=(A\pi^2-1)x^2+(B\pi^4-1)x^4+(C\pi^6-1)x^6+\text{etc}$$

und es wird aus §7

$$P=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\pi x\cot\pi x-\frac{xx}{1-xx}$$

sein, deren Wert im Fall $x=1$ gefunden wird, indem man $x=1-w$ setzt, während w verschwindet; dann aber entsteht

$$P=\frac{1}{2}+\frac{\pi(1-w)\cos\pi w}{2\sin\pi w}-\frac{1-2w+ww}{w(2-w)}$$

oder

$$P=\frac{1}{2}+\frac{1-w}{2w}-\frac{1-2w}{w(2-w)}=\frac{1}{2}+\frac{w}{2w(2-w)}-\frac{3}{4},$$

sodass, was ganz und gar bemerkenswert scheint,

$$A\pi^2-1+B\pi^4-1+C\pi^6-1+D\pi^8-1+\text{etc}=\frac{3}{4}$$

ist. Darauf aber finden wir durch Integration

$$\int\frac{P\mathrm{d}x}{x}=\frac{1}{2}(A\pi^2-1)xx+\frac{1}{4}(B\pi^4-1)x^4+\frac{1}{6}(C\pi^6-1)x^6+\text{etc}$$

und daher

$$\int\frac{P\mathrm{d}x}{x}=\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}\ln\sin\pi x+\frac{1}{2}\ln(1-xx)+\frac{1}{2}\ln\pi$$

oder

$$\int\frac{P\mathrm{d}x}{x}=\frac{1}{2}\ln(1-xx)-\frac{1}{2}\ln\frac{\sin\pi x}{\pi x}.$$

Man setze nun wiederum $x = 1 - w$ und es wird

$$\int \frac{P\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{2}\ln 2w - \frac{1}{2}\ln\frac{\sin \pi w}{\pi(1-w)} = \frac{1}{2}\ln 2$$

werden, sodass

$$\frac{1}{2}(A\pi\pi - 1) + \frac{1}{4}(B\pi^4 - 1) + \frac{1}{6}(C\pi^6 - 1) + \text{etc} = \frac{1}{2}\ln 2$$

ist; nachdem diese Reihe aber von der oberen abgezogen worden ist, bleibt

$$\frac{1}{2}(A\pi\pi - 1) + \frac{3}{4}(B\pi^4 - 1) + \frac{5}{6}(C\pi^6 - 1) + \text{etc} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

übrig, sodass

$$\begin{aligned} O = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 &+ \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc}\right) \\ &+ \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \text{etc}\right) \\ &+ \frac{6}{7}\left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \text{etc}\right) \\ &+ \text{etc} \end{aligned}$$

ist.

§29 Weil also die Zahl O aus 2 Teilen besteht, deren erste

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = 0,403426409720073$$

ist, die Zahl aber selbst $O = 0,5772156649015328$, wird der andere Teil gleich $0,1737892551815055$ sein; wenn also auf ähnliche Weise der andere Teil auf Logarithmen oder die Quadrate des Kreises zurückgeführt werden könnte, könnte man weiter bei dieser Aufgabe nichts wünschen. Dieser andere Teil aber kann wegen

$$\frac{2}{3}z^3 + \frac{4}{5}z^5 + \frac{6}{7}z^7 + \text{etc} = 2\int \frac{zz\mathrm{d}z}{(1-zz)^2} = \frac{z}{1-zz} - \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$$

durch die folgende Form beschafft werden

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} - \ln\frac{3}{1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \ln\frac{4}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ln\frac{5}{3}\right) + \text{etc},$$

welche aber, während i eine unendliche Zahl bezeichnet, von selbst auf diesen Ausdruck zurückgeführt wird

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{i}-\ln i-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2,$$

sodass man daher nichts Neues findet, weil nach Hinzufügen des ersten Teils $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$, wie per se feststeht,

$$O=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{i}-\ln i$$

entsteht. Es bleibt also eine Frage von großer Bedeutung, von welcher Art diese Zahl O ist und zu welchem Geschlecht an Größen sie zu zählen ist.

Wenn der allgemeine Term $X = \ln x$ ist

§30 Hier wird also

$$\int X\mathrm{d}x = x\ln x - x$$

sein und wegen

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$$

wird weiter

$$\frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3}=\frac{1\cdot 2}{x^3},\quad \frac{\mathrm{d}^5X}{\mathrm{d}x^5}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x^5},\quad \frac{\mathrm{d}^7X}{\mathrm{d}x^7}=\frac{1\cdot 2\cdots 6}{x^7},\quad \text{etc}$$

werden. Daher werden wir, wenn wir unbestimmt

$$S=\ln 1+\ln 2+\ln 3+\ln 4+\cdots+\ln x$$

setzen, diese Summation haben

$$\frac{A}{2x}-\frac{1\cdot 2\cdot B}{2^3\cdot x^3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot C}{2^5\cdot x^5}-\frac{1\cdot 2\cdots 6\cdot D}{2^7\cdot x^7}+\text{etc}=S-\frac{1}{2}\ln x-x\ln x+x-O,$$

welche Konstante so beschaffen sein muss, dass sie einen Wert von x genügt. Es sei also $x=1$, und weil $S=\ln 1=0$ ist, wird

$$-O+1=\frac{A}{2}-\frac{1\cdot 2\cdot B}{2^3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot C}{2^5}-\frac{1\cdot 2\cdot 6\cdot D}{2^7}+\text{etc}$$

sein. Weil daher

$$Aay - Ba^3y^3 + Ca^5y^5 - Da^7y^7 + \text{etc} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+e^{-2ay}}{1-e^{-2ay}} - \frac{1}{2ay}$$

ist, wollen wir wegen

$$\int e^{-y}y^n \mathrm{d}n = 1 \cdot 2 \cdots n$$

mit $e^{-y}\frac{\mathrm{d}y}{y}$ multiplizieren und die Integration wird

$$\begin{aligned} Aa - 1 \cdot 2 \cdot Ba^3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot Ca^5 - \text{etc} &= \frac{1}{2}\int e^{-y}\frac{1+e^{-2ay}}{1-e^{-2ay}} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{1}{2a}\int \frac{e^{-y}}{yy}\mathrm{d}y \\ &= \int \frac{e^{-y}\mathrm{d}y}{y(1-e^{-2ay})} - \frac{1}{2}\int \frac{e^{-y}}{y}\mathrm{d}y - \frac{1}{2a}\int \frac{e^{-y}\mathrm{d}y}{yy} \end{aligned}$$

liefern, nachdem diese Integrale von der Grenze $y = 0$ bis $y = \infty$ erstreckt worden sind.

§31 Wir wollen nun $a = \frac{1}{2x}$ setzen und werden die Gleichung erhalten

$$-O + S + x - \frac{1}{2}\ln x - x\ln x = \int \frac{e^{-y}\mathrm{d}y}{y(1-e^{-y:x})} - \frac{1}{2}\int \frac{e^{-y}\mathrm{d}y}{y} - x\int \frac{e^{-y}\mathrm{d}y}{yy},$$

in welchen Integrationen die Größe x als eine Konstante betrachtet werden muss. Daher wird für $x = 1$ genommen

$$-O + 1 = \int \frac{e^{-y}\mathrm{d}y}{y(1-e^{-y})} - \frac{1}{2}\int \frac{e^{-y}\mathrm{d}y}{y} - \int \frac{e^{-y}\mathrm{d}y}{yy}$$

werden und weil ja

$$-\int \frac{e^{-y}\mathrm{d}y}{yy} = \frac{e^{-y}}{y} + \int \frac{e^{-y}\mathrm{d}y}{y}$$

ist, wird

$$-O + 1 = \int \frac{e^{-y}\mathrm{d}y}{y(1-e^{-y})} + \frac{1}{2}\int \frac{e^{-y}\mathrm{d}y}{y} + \frac{e^{-y}}{y} - \frac{e}{0}$$

sein. Wenn man hier $e^{-y} = z$ setzt und die Integrale von der Grenze $z = 0$ bis hin zu $z = 1$ erstreckt, wird man

$$-O + 1 = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}z}{\ln z} - \int \frac{\mathrm{d}z}{(1-z)\ln z} - \int \frac{\mathrm{d}z}{(\ln z)^2}$$

finden, aber in der Tat kann man daher die Natur dieser Zahl O nicht erkennen, obwohl trotzdem anderswoher bekannt ist, dass sie gleich $\frac{1}{2}\ln 2\pi$ ist und so teils durch Logarithmen, teils durch die Peripherie des Kreises π bestimmt wird. Wie man also diesen Wert findet, wird der Mühe Wert sein, gründlicher betrachtet zu haben.

§32 Weil ja von Wallis diese Gleichung gefunden worden ist

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\cdot\frac{10\cdot 10}{9\cdot 11}\cdot\text{etc},$$

wird durch Logarithmen

$$\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2} = \ln 2 - \ln 3 + \ln 4 - \ln 5 + \ln 6 - \ln 7 + \ln 8 - \ln 9 + \text{etc}$$

sein oder auf diese Weise durch eine zweifache Reihe

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2} &= \ln 2 + \ln 4 + \ln 6 + \ln 8 + \ln 10 + \ln 12 + \text{etc} + \ln 2x + \frac{1}{2}\ln 2(x+1)\\ &\quad - \ln 3 - \ln 5 - \ln 7 - \ln 9 - \ln 11 - \ln 13 - \text{etc} - \ln(2x+1),\end{aligned}$$

wenn natürlich jede der beiden Reihen zwar ins Unendliche, aber dennoch die gleiche Anzahl an Termen fortgesetzt wird oder jedem der beiden x derselbe Wert zugeteilt wird; diese doppelte Reihe kann auch auf diese Weise beschafft werden:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2} &= \ln 2 + \ln 4 + \ln 6 + \ln 8 + \cdots + \ln 2x - \frac{1}{2}\ln 2x\\ &\quad - \ln 1 - \ln 3 - \ln 5 - \ln 7 - \cdots - \ln(2x-1).\end{aligned}$$

Aber aus unserer Reihe selbst haben wird für ein unendliche genommenes x

$$\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \cdots + \ln x = O - x + \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln x,$$

woher, wenn $x\ln 2$ oder zu einem beliebigen Term $\ln 2$ hinzuaddiert wird,

$$\ln 2 + \ln 4 + \ln 6 + ł8 + \cdots + \ln 2x = O - x + x\ln 2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln x$$

wird. Darauf geht, wenn wir dort $2x$ anstelle von x schreiben

$$\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \cdots + \ln 2x = O - 2x + \left(2x + \frac{1}{2}\right)\ln 2 + \left(2x + \frac{1}{2}\right)\ln x$$

hervor; wenn von dieser jene abgezogen wird, bleibt

$$\ln 1 + \ln 3 + \ln 5 + \cdots + \ln(2x-1) = -x + \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln 2 + x \ln x$$

übrig; wenn diese Summe in jener Form anstelle der beiden Reihen eingesetzt wird, wird diese Gleichung entstehen

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\ln 2x \\
=&O - x + x\ln 2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln x + x - \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln 2 - x \ln x \\
=&O - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln x,
\end{aligned}$$

woher man

$$O = \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\ln 2x + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln x = \frac{1}{2}\ln 2\pi$$

folgert, oder

$$O = 0,9189385332046727417803297.$$

§33 Weil also $O = \frac{1}{2}\ln 2\pi$, folgern wir daher allerdings, dass

$$\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\ln z} - \int\frac{dz}{(1-z)\ln z} - \int\frac{dz}{(\ln z)^2} = 1 - \frac{1}{2}\ln 2\pi$$

sein wird und so ist klar, dass diese drei Integrationen, wenn sie natürlich von der Grenze $z = 0$ bis hin zur Grenze $z = 1$ erstreckt werden, auf die Größe $\ln 2\pi$ führen; wie das durch die Rechnung gezeigt werden kann, ist nicht klar, woher diese Untersuchung umso größerer Aufmerksamkeit würdig scheint. Man durchschaut freilich leicht, dass

$$-\int\frac{dz}{(\ln z)^2} = \frac{z}{\ln z} - \int\frac{dz}{\ln z}$$

ist, sodass

$$\frac{z}{\ln z} - \frac{1}{2}\int\frac{dz}{\ln z} - \int\frac{dz}{(1-z)\ln z} = 1 - \frac{1}{2}\ln 2\pi$$

ist. Wir gewinnen auch wenig, indem wir $z = v^i$ und $\ln z = -i(1-v)$ setzen, während i eine unendliche Zahl wird; wir folgern aber diese Gleichung

$$\frac{-v^i}{i(1-v)} + \frac{1}{2}\int\frac{v^{i-1}dv}{1-v} + \int\frac{v^{i-1}dv}{(1-v)(1-v^i)} = 1 - \frac{1}{2}\ln 2\pi,$$

welche Integrale in gleicher Weise von $v = 0$ bis $v = 1$ erstreckt werden müssen.

§34 Die Entwicklung dieser Integralformeln liefert nichts anderes, außer was sofort aus der ersten Gleichung gefolgert werden kann, indem man eine unendliche Zahl x nimmt; weil nämlich dann die Reihe, die die Buchstaben A, B, C, D, etc umfasst, verschwindet, werden wir

$$O = \frac{1}{2}\ln 2\pi = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln x - (x + \frac{1}{2})\ln x + x$$

haben, wo, weil die Reihe

$$\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln x$$

aus x Termen besteht, ein beliebiger der übrigen Teile $(x + \frac{1}{2})\ln x$ und x in eine Reihe genauso vieler Terme verwandelt wird. Und der erste, x, liefert freilich so viele der Einheit gleiche Terme, der erste, $(x + \frac{1}{2})\ln x$, aber wird auf folgende Weise entwickelt:

$$\begin{array}{rcccccc}
\frac{1}{2}\ln 2\pi = & \ln 1 \ + & \ln 2 \ + & \ln 3 \ + & \cdots + & \ln(x-1) \ + & \ln x \\
+ & 1 \ + & 1 \ + & 1 \ + & \cdots + & 1 \ + & 1 \\
- & \frac{3}{2}\ln 1 - & \frac{5}{2}\ln 2 - & \frac{7}{2}\ln 3 - & \cdots - & (x-\frac{1}{2})\ln(x+1) - & (x+\frac{1}{2})\ln x \\
 & + & \frac{3}{2}\ln 1 + & \frac{5}{2}\ln 2 + & \cdots + & (x-\frac{3}{2})\ln(x-2) + & (x-\frac{1}{2})\ln(x-1)
\end{array}$$

woher man diese hinreichend gefällige Reihe berechnet

$$\frac{1}{2}\ln 2\pi = 1 - \left(\frac{3}{2}\ln\frac{2}{1} - 1\right) - \left(\frac{5}{2}\ln\frac{3}{2} - 1\right) - \left(\frac{7}{2}\ln\frac{4}{3} - 1\right) - \left(\frac{9}{2}\ln\frac{5}{4} - 1\right) - \text{etc},$$

welche angenehmer in dieser Form ausgedrückt wird

$$1 - \frac{1}{2}\ln 2\pi = \frac{3}{2}\ln\frac{2}{1} - 1 + \frac{5}{2}\ln\frac{3}{2} - 1 + \frac{7}{2}\ln\frac{4}{3} - 1 + \frac{9}{2}\ln\frac{5}{4} - 1 + \text{etc.}$$

Der allgemeine Term dieser Reihe ist

$$\frac{x}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} - 1,$$

der in diese Reihe entwickelt wird

$$\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{5x^4} + \frac{1}{7x^6} + \frac{1}{9x^8} + \text{etc},$$

woraus wir durch unendliche Reihen

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{2}\ln 2\pi = & \frac{1}{3\cdot 3^2}+\frac{1}{5\cdot 3^4}+\frac{1}{7\cdot 3^6}+\frac{1}{9\cdot 3^8}+\text{etc}\\ & +\frac{1}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{5\cdot 5^4}+\frac{1}{7\cdot 5^6}+\frac{1}{9\cdot 5^8}+\text{etc}\\ & +\frac{1}{3\cdot 7^2}+\frac{1}{5\cdot 7^4}+\frac{1}{7\cdot 7^6}+\frac{1}{9\cdot 7^8}+\text{etc}\\ & +\frac{1}{3\cdot 9^2}+\frac{1}{5\cdot 9^4}+\frac{1}{7\cdot 9^6}+\frac{1}{9\cdot 9^8}+\text{etc}\\ & +\text{etc}\end{aligned}$$

haben werden, wo, weil die Reihen der um den ersten Term gekürzten reziproken Potenzen auftauchen,

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{2}\ln 2\pi = \frac{1}{3}\left(\frac{2^2-1}{2^2}A\pi^2-1\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{2^4-1}{2^4}B\pi^4-1\right)\\ +\frac{1}{7}\left(\frac{2^6-1}{2^6}C\pi^6-1\right)+\text{etc}\end{aligned}$$

sein wird; oben aber hatten wir

$$1-\frac{1}{2}\ln 2\pi = \frac{A}{2}-\frac{1\cdot 2\cdot B}{2^3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot C}{2^5}-\frac{1\cdot 2\cdots 6\cdot D}{2^7}+\text{etc}$$

gefunden.

§35 Relationen solcher Art verdienen umso größere Aufmerksamkeit, je geheimnisvoller sie sind, woher es der Mühe Wert sein wird, die gerade gefundene Reihe sorgfältiger zu entwickeln. Zu diesem Ziel möchte ich diese in einer allgemeineren Form umfassen, in dem ich

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{3}A\pi^2u^2+\frac{1}{5}B\pi^4u^4+\frac{1}{7}C\pi^6u^6+\frac{1}{9}D\pi^8u^8+\text{etc}\\ Q &= \frac{1}{3}\frac{A\pi^2u^2}{2^2}+\frac{1}{5}\frac{B\pi^4u^4}{2^4}+\frac{1}{7}\frac{C\pi^6u^6}{2^6}+\frac{1}{9}\frac{D\pi^8u^8}{2^8}+\text{etc}\\ R &= \frac{1}{3}u^2+\frac{1}{5}u^4+\frac{1}{7}u^6+\frac{1}{9}u^8+\text{etc} = \frac{1}{2u}\ln\frac{1+u}{1-u}-1\end{aligned}$$

setze, dass für $u=1$ gesetzt

$$1-\frac{1}{2}\ln 2\pi = P-Q-R$$

ist. Um die Werte der Buchstaben P und Q zu bestimmen, nehme ich die oben in §6 gegebene Gleichung

$$Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + Dx^8 + \text{etc} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x \cot x,$$

woher durch Integration

$$\frac{1}{3}Ax^3 + \frac{1}{5}Bx^5 + \frac{1}{7}Cx^7 + \text{etc} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \frac{x\mathrm{d}x \cos x}{\sin x}$$

wird, daher

$$\frac{1}{3}Ax^2 + \frac{1}{5}Bx^4 + \frac{1}{7}Cx^6 + \text{etc} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\int \frac{x\mathrm{d}x \cos x}{\sin x}.$$

Daher folgern wir, nachdem zuerst $x = \pi u$, dann aber $x = \frac{\pi u}{2}$ gesetzt wurde

$$P = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi u}\int \frac{\pi\pi u\mathrm{d}u \cos \pi u}{\sin \pi u} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}\int \frac{u\mathrm{d}u \cos \pi u}{\sin \pi u},$$

wegen $u = 1$,

$$Q = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi u}\int \frac{\pi\pi u\mathrm{d}u \cos \frac{1}{2}\pi u}{4 \sin \frac{1}{2}\pi u} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\int \frac{u\mathrm{d}u \cos \frac{1}{2}\pi u}{\sin \frac{1}{2}\pi u}$$

und wegen

$$\sin \pi u = 2 \sin \frac{1}{2}\pi u \cos \frac{1}{2}\pi u \quad \text{und} \quad \cos \pi u = \cos^2 \frac{1}{2}\pi u - sin^2 \frac{1}{2}\pi u$$

wird

$$P - Q = \frac{\pi}{4}\int \frac{u\mathrm{d}u(\cos^2 \frac{1}{2}\pi u - \cos^2 \frac{1}{2}\pi u + \sin^2 \frac{1}{2}\pi u)}{\sin \frac{1}{2}\pi u \cos \frac{1}{2}\pi u} = \frac{\pi}{4}\int \frac{u\mathrm{d}u \sin \frac{1}{2}\pi u}{\cos \frac{1}{2}\pi u}$$

werden, sodass

$$1 - \frac{1}{2}\ln 2\pi = \frac{\pi}{4}\int \frac{u\mathrm{d}u \sin \frac{1}{2}\pi u}{\cos \frac{1}{2}\pi u} - \frac{1}{2}\ln \frac{1+u}{1-u} + 1$$

ist oder

$$\ln 2\pi = \int \frac{-\frac{1}{2}\pi u\mathrm{d}u \sin \frac{1}{2}\pi u}{\cos \frac{1}{2}\pi u} + \ln \frac{1+u}{1-u} = \ln \frac{1+u}{1-u} + u \ln \cos \frac{1}{2}\pi u$$
$$- \int \mathrm{d}u \ln \cos \frac{1}{2}\pi u,$$

wenn natürlich nach Ausführung der Integration $u = 1$ gesetzt wird.

§36 Wir wollen nun den Winkel $\frac{1}{2}\pi u = \varphi$ oder $u = \frac{2\varphi}{\pi}$ setzen, dass das Integral von der Grenze $\varphi = 0$ bis hin zu $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ erstreckt werden muss, und die vorhergehende Gleichung wird übergehen in diese Form

$$\ln 2\pi = \ln \frac{\pi + 2\varphi}{\pi - 2\varphi} + \ln\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\int d\varphi \ln\cos\varphi,$$

oder wegen $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\ln 2\pi = \ln 2\pi - \ln \frac{\pi - 2\varphi}{\cos\varphi} - \frac{2}{\pi}\int d\varphi \ln\cos\varphi,$$

wo der Bruch

$$\frac{\pi - 2\varphi}{\cos\varphi}$$

im Fall $\varphi = \frac{\pi}{2}$ übergeht in

$$\frac{2}{\sin\varphi} = 2,$$

sodass

$$\ln 2\pi = \ln 2\pi - \ln 2 - \frac{2}{\pi}\int d\varphi \ln\cos\varphi$$

ist oder

$$\int d\varphi \ln\cos\varphi = -\frac{\pi\ln 2}{2}.$$

Wenn also gezeigt werden könnte, dass der Wert der Integralformel $\int d\varphi \ln\cos\varphi$, die von der Grenze $\varphi = 0$ bis hin zu $\varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ erstreckt wurde, in der Tat $-\frac{\pi\ln 2}{2}$ gleich wird, würden wir durch ein ganz und gar anderen Weg das erreichen, was wir vorher durch Umwege durch den Wert des Buchstaben $O = \frac{1}{2}\ln 2\pi$ gefolgert haben. Weil wir ja aber nun über den Wert schon sicher sind, haben wir dieses ausgezeichnete Theorem geschlossen, dass das vom Wert $\varphi = 0$ bis hin zu $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ erstreckte Integral

$$\int d\varphi \ln\cos\varphi = -\frac{\pi\ln 2}{2}$$

ist, oder wenn wir $\cos\varphi = \nu$ setzen, dass die Integrationsgrenzen $\nu = 1$ und $\nu = 0$ sind, ist zu zeigen, dass

$$\int \frac{d\nu \ln\nu}{\sqrt{1 - \nu\nu}} = \frac{\pi\ln 2}{2}$$

sein wird, woher, nachdem dieses Integral in eine Reihe entwickelt worden ist,

$$\frac{\pi \ln 2}{2} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9^2} + \text{etc}$$

sein wird, welche Reihe allerdings auf

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{s} \arcsin s$$

zurückgeführt wird, indem nach der Integration $s = 1$ gesetzt wird; aber diese weiter für $s = \sin\varphi$ gesetzt auf diese

$$\int \frac{\varphi \mathrm{d}\varphi \cos\varphi}{\sin\varphi} = \varphi \ln\sin\varphi - \int \mathrm{d}\varphi \ln\sin\varphi = \frac{\pi \ln 2}{2}$$

oder

$$\int \mathrm{d}\varphi \ln\sin\varphi = -\frac{\pi \ln 2}{2},$$

die mit der oberen übereinstimmt.

§37 Dass aber

$$\int \mathrm{d}\varphi \ln\sin\varphi = -\frac{\pi \ln 2}{2}$$

ist, zeigt man auf diese Weise: Weil

$$\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = 2\sin 2\varphi + 2\sin 4\varphi + 2\sin 6\varphi + 2\sin 8\varphi + \text{etc}$$

ist, wird

$$\ln\sin\varphi = -\cos 2\varphi - \frac{1}{2}\cos 4\varphi - \frac{1}{3}\cos 6\varphi - \frac{1}{4}\cos 8\varphi - \text{etc} - \ln 2$$

sein, also

$$\int \mathrm{d}\varphi \ln\sin\varphi = -\varphi \ln 2 - \frac{1}{2}\sin 2\varphi - \frac{1}{2 \cdot 2^2}\sin 4\varphi - \frac{1}{2 \cdot 3^2}\sin 6\varphi - \frac{1}{2 \cdot 4^2}\sin 8\varphi - \text{etc};$$

und schon wird für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gesetzt

$$\int \mathrm{d}\varphi \ln\sin\varphi = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$